

[illegible]

2ª Fase – Nível III

Aluno(a): _____

Escola: _____

Município: _____

01. Uma escola de idiomas oferece três cursos: espanhol, francês e inglês. Nessa escola, 83 alunos estudam no curso de espanhol, 79 estudam no curso de francês, 72 estudam no curso de inglês, 25 estudam nos cursos de espanhol e francês, 21 estudam nos cursos de espanhol e inglês e alguns estudam nos cursos de francês e inglês.

Sabendo que não tem aluno que estuda nos três cursos, o número mínimo de alunos que estudam nessa escola é

- A) 104.
- B) 137.
- C) 188.
- D) 209.
- E) 234.

02. Uma Copa do Mundo de Futebol fictícia é disputada por exatamente 64 seleções em um sistema de eliminação única (mata-mata). Inicialmente, distribuem-se de forma aleatória as 64 seleções em dois grupos, cada um com 32 seleções. A partir daí, para cada rodada de jogos, as seleções de um mesmo grupo são emparelhadas de modo puramente aleatório, por sorteio, avançando as vencedoras de cada par para a rodada seguinte, até que sobre apenas uma seleção em cada grupo. As duas seleções restantes realizam a fase final do torneio. Não existe empate técnico entre as seleções. Existe uma ordem linear e clara de superioridade entre elas, de modo que não há zebras: se a seleção A é mais forte que a B, e a B é mais forte que a C, a seleção A vencerá a B e também a C em um eventual confronto.

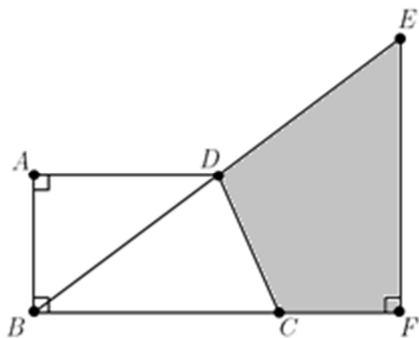
Sabendo que a seleção Vila do Infinito é a segunda mais forte entre as 64 seleções participantes, qual é a probabilidade de essa seleção chegar à fase final do torneio?

- A) $\frac{1}{2}$
- B) $\frac{32}{63}$
- C) $\frac{11}{21}$
- D) $\frac{33}{64}$
- E) $\frac{1}{3}$

03. Um número inteiro positivo de três algarismos, escrito no sistema de numeração decimal, é chamado de *magnífico* se ele é igual a 19 vezes a soma de seus algarismos e, além disso, a soma de seus algarismos é um número primo. Quantos números magníficos existem?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

04. A figura abaixo mostra um trapézio retângulo $ABCD$ com base menor $AD = 12$ cm, base maior $BC = 16$ cm e altura $AB = 9$ cm. No triângulo retângulo BEF , o ponto C está no cateto $\overline{BF}$ e D é o ponto médio da hipotenusa $\overline{BE}$.



Qual é a área, em cm^2 , do quadrilátero $CDEF$?

- A) 20
- B) 36
- C) 72
- D) 108
- E) 144

05. Ronaldo ganhou um curso gratuito em uma plataforma de educação online, no qual libera-se uma aula por dia durante 10 dias consecutivos, a contar do primeiro dia de acesso. No entanto, para garantir o certificado ele precisa cumprir as seguintes regras.

Regra 1: Caso Ronaldo não consiga acessar a plataforma em algum dia, ele poderá assistir no dia seguinte a aula do dia anterior e a nova aula do dia.

Regra 2: Caso Ronaldo fique dois dias consecutivos sem acessar a plataforma, o seu acesso será bloqueado.

Regra 3: Ao final dos 10 dias ele receberá o certificado se tiver assistido a todas as 10 aulas.

De quantas maneiras Ronaldo pode realizar o curso sem ter o seu acesso bloqueado?

- A) 10
- B) 34
- C) 55
- D) 144
- E) 256

06. Considere a função real f definida por $f(x) = \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x$. Um estudante analisa os valores de x para os quais se tem $f(x) \leq 34$ e, para isso, observa que $\sqrt{3+\sqrt{8}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{8}} = 1$ e reescreve a expressão que define a função como $f(x) = a^x + \frac{1}{a^x}$, em

que $a = \sqrt{3+\sqrt{8}} > 1$.

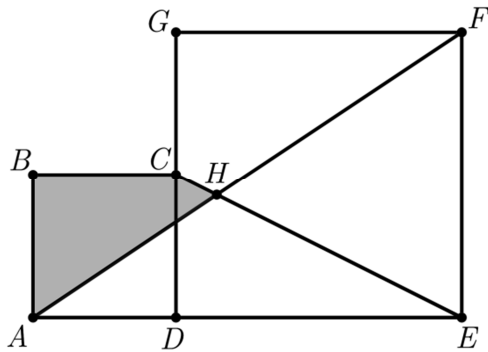
Quantos são os valores inteiros de x para os quais se tem $f(x) \leq 34$?

- A) Nenhum
- B) 8
- C) 9
- D) 10
- E) Infinitos

07. Quatro caixas contêm, cada uma, 5 livros de Matemática. Os livros de uma mesma caixa são idênticos entre si, enquanto os de caixas diferentes abordam tópicos distintos da Matemática.

De quantas maneiras é possível montar um pacote com exatamente 10 livros, escolhendo pelo menos um livro de cada pacote?

08. Na figura, $ABCD$ e $DEFG$ são quadrados justapostos cujos lados medem, respectivamente, 7 cm e 14 cm. Sabe-se que o ponto H é a interseção dos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{CE}$.



Qual é a área, em cm^2 , do quadrilátero $ABCH$?

09. Uma sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ é definida por

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 - a_n},$$

para todo número natural $n \geq 1$.

Qual é o valor da soma dos primeiros 2026 termos dessa sequência?

10. Qual é o menor número inteiro positivo n tal que o produto de todos os seus divisores positivos é igual a n^3 ?